

Branch & Price pour le problème du multiflot *k*-séparable de coût minimal

Jérôme Truffot, Christophe Duhamel, Philippe Mahey

`{jerome.truffot,christophe.duhamel,philippe.mahey}@isima.fr`

LIMOS, UMR 6158 - CNRS
Université Blaise Pascal
Clermont-Ferrand - France

ROADEF'05 - 14-16 Février 2005





Introduction

- ▶ Nouvelles technologies : réseaux optiques, protocole MPLS, ...
- ▶ MPLS-TE : Traffic Engineering (QoS, gestion)
- ▶ Limites sur le nombre de chemins
- ▶ Problème classique : le flot de coût minimal



Plan

Présentation du problème

- Complexité
- Etat de l'art

Modélisation

- Définitions et notations
- Premiers modèles
- Modèle arcs-sommets
- Modèle arcs-chemins

Branch & Price

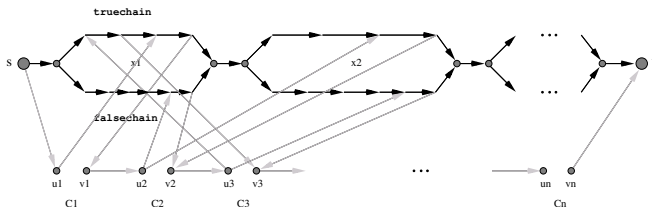
- Cadre général
- Règle de Branchement
- Génération de colonnes
- Améliorations

Résultats Numériques

- Temps CPU
- Génération de colonnes

Complexité du problème

- ▶ Réduction du 2-séparable au SAT (Baier, Köhler et Skutella)



- ▶ Contrainte sur nombre de chemins \rightarrow problèmes NP-complets

Etat de l'art : K -SFP

- ▶ Edge Disjoint Path Problem (Survivability) : K. Menger (1927)
- ▶ Unsplittable Flow Problem : J.M. Kleinberg (1996), A. Atamtürk (2000)
- ▶ K -Splittable Flow Problem : G. Baier, E. Köhler et M. Skutella (2002)

Définitions et notations

- ▶ Graphe $G = (V, E)$ avec capacité u_e et coût c_e sur les arcs
- ▶ commodité $k \in K : (s_k, t_k, d_k)$
- ▶ nombre maximum de chemins : H_k



Modèle UFP

- ▶ Variables de support de chemin
- ▶ Flot = demande
- ▶ Contraintes de flot suffisantes

⇒ Programme Entier

Premier Modèle arcs-sommets

- ▶ Variables de flot x_e^k
 - ▶ Variables de support de flot y_e^k
- ⇒ Comment imposer la contrainte de H_k -séparabilité ?
- ⇒ Découplage des H_k chemins

Modèle arcs-sommets : variables

- ▶ Arc de retour $\bar{e}_k = (t_k, s_k)$, capacité infinie, coût nul
 $E' = E \cup \{\bar{e}_k, k \in K\}$
- ▶ Pour chaque commodité $k \in K$,
 pour chaque chemin $h \in \{1, \dots, H_k\}$:
 - ▶ variables de flot : $x_e^{hk} \geq 0 \quad \forall e \in E'$
 - ▶ variables de support de flot : $y_e^{hk} \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E'$

- ▶ Fonction objectif : $\min \sum_{k \in K} \sum_{h=1}^{H_k} \sum_{e \in E} c_e x_e^{hk}$

Modèle arcs-sommets : contraintes de flot

- ▶ Contrainte de conservation de flot :

$$Ax^{hk} = 0 \quad \forall k \in K, \quad \forall h \in \{1, \dots, H_k\}$$

- ▶ Contrainte de capacité :

$$\sum_{k \in K} \sum_{h=1}^{H_k} x_e^{hk} \leq u_e \quad \forall e \in E$$

Modèle arcs-sommets : contraintes de flot

- ▶ Contrainte de support de flot :

$$x_e^{hk} \leq u_e y_e^{hk} \quad \forall e \in E \quad \forall k \in K, \quad \forall h \in \{1, \dots, H_k\}$$

- ▶ Contrainte de demande :

$$\sum_{h=1}^{H_k} x_{e_k}^{hk} = d_k \quad \forall k \in K$$

Modèle arcs-sommets : contraintes de support de flot

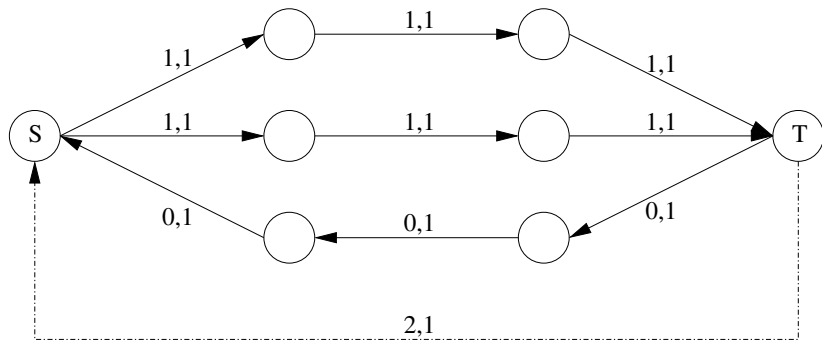
- ▶ Contrainte de conservation de flot :

$$Ay^{hk} = 0 \quad \forall k \in K, \quad \forall h \in \{1, \dots, H_k\}$$

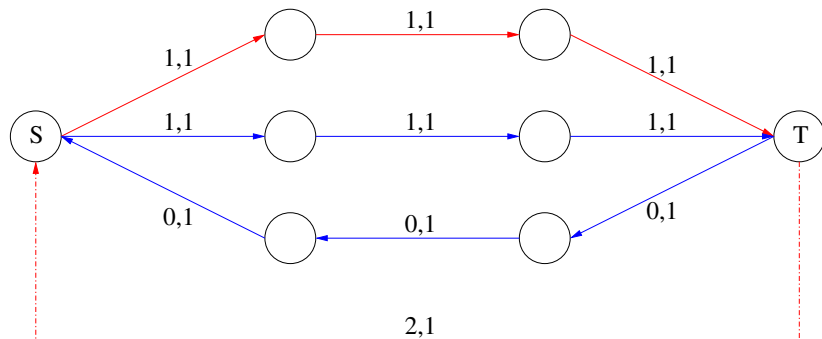
- ▶ Contrainte d'intégrité :

$$y_e^{hk} \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E, \quad \forall k \in K, \quad \forall h \in \{1, \dots, H_k\}$$

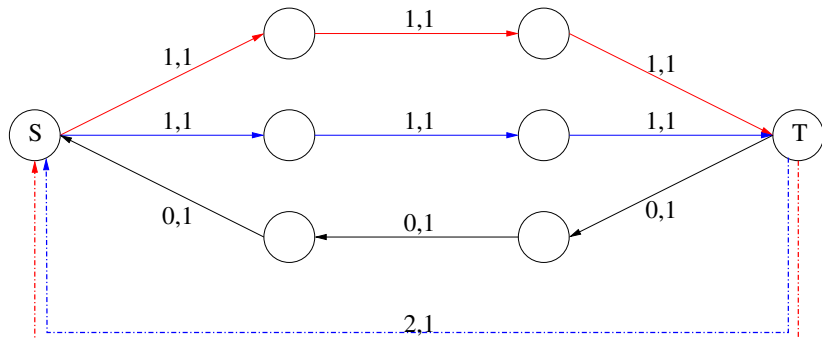
Modèle arcs-sommets : limite de l'approche



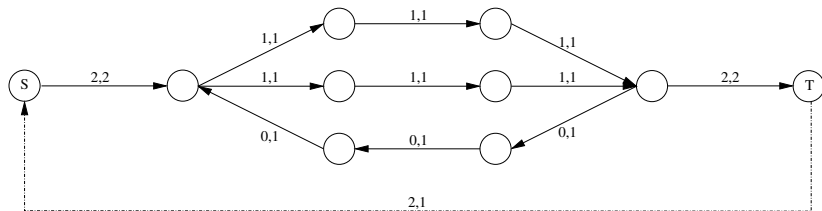
Modèle arcs-sommets : limite de l'approche



Modèle arcs-sommets : limite de l'approche



Modèle arcs-sommets : limite de l'approche

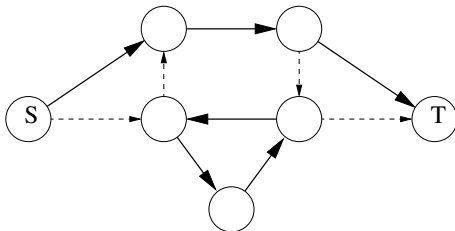


Modèle arcs-sommets : contrainte supplémentaire

- ▶ Contrainte de degré :

$$\sum_{e \in \omega^+(v)} y_e^{hk} \leq 1 \quad \forall v \in V, \quad \forall k \in K, \quad \forall h \in \{1, \dots, H_k\}$$

- ▶ n'élimine pas les sous-cycles (pas gênant)



Modèle arcs-sommets : formulation complète

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{h=1}^{H_k} \sum_{e \in E} c_e x_e^{hk}$$

s.c.

$$Ax^{hk} = 0 \quad \forall k \in K, \quad \forall h \in \{1, \dots, H_k\} \quad (1.a)$$

$$Ay^{hk} = 0 \quad \forall k \in K, \quad \forall h \in \{1, \dots, H_k\} \quad (1.b)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{h=1}^{H_k} x_e^{hk} \leq u_e \quad \forall e \in E \quad (1.c)$$

$$x_e^{hk} - u_e y_e^{hk} \leq 0 \quad \forall e \in E, \quad \forall k \in K, \quad \forall h \in \{1, \dots, H_k\} \quad (1.d)$$

$$\sum_{e \in \omega^+(v)} y_e^{hk} \leq 1 \quad \forall v \in V, \quad \forall k \in K, \quad \forall h \in \{1, \dots, H_k\} \quad (1.e)$$

$$\sum_{h=1}^{H_k} x_{e_k}^{hk} = d_k \quad \forall k \in K \quad (1.f)$$

$$x_e^{hk} \geq 0 \quad \forall e \in E, \quad \forall k \in K, \quad \forall h \in \{1, \dots, H_k\} \quad (1.g)$$

$$y_e^{hk} \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E, \quad \forall k \in K, \quad \forall h \in \{1, \dots, H_k\} \quad (1.h)$$

Modèle arcs-chemins : variables

- ▶ P_k ensemble des chemins élémentaires de s_k à t_k
- ▶ Pour chaque commodité $k \in K$,
pour chaque chemin $h \in \{1, \dots, H_k\}$:
 - ▶ variables de flot : $x_p^{hk} \geq 0 \quad \forall p \in P_k$
 - ▶ variables de support de flot : $y_p^{hk} \in \{0, 1\} \quad \forall p \in P_k$

- ▶ Fonction objectif : $\min \sum_{k \in K} \sum_{h=1}^{H_k} \sum_{p \in P_k} c_p x_p^{hk}$

avec $c_p = \sum_{e \in E} \delta_e^p c_e$ coût du chemin

Modèle arcs-chemins : contraintes

- ▶ Contrainte de capacité :

$$\sum_{k \in K} \sum_{h=1}^{H_k} \sum_{p \in P^k} \delta_e^p x_p^{hk} \leq u_e \quad \forall e \in E$$

- ▶ Contrainte de couplage :

$$x_p^{hk} \leq u_p y_p^{hk} \quad \forall k \in K, \quad \forall h \in \{1, \dots, H_k\}, \quad \forall p \in P_k$$

avec $u_p = \min_{e \in p} u_e$ capacité du chemin

Modèle arcs-chemins : contraintes

- ▶ Contrainte de nombre de chemins :

$$\sum_{p \in P_k} y_p^{hk} \leq 1 \quad \forall k \in K, \quad \forall h \in \{1, \dots, H_k\}$$

- ▶ Contrainte de demande :

$$\sum_{h=1}^{H_k} \sum_{p \in P_k} x_p^{hk} = d_k \quad \forall k \in K$$

Modèle arcs-chemins : formulation complète

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{h=1}^{H_k} \sum_{p \in P_k} c_p x_p^{hk}$$

s.c.

$$\sum_{h,k,p} \delta_e^p x_p^{hk} \leq u_e \quad \forall e \in E \quad (2.a)$$

$$x_p^{hk} - u_p y_p^{hk} \leq 0 \quad \forall k \in K \quad \forall h \in \{1, \dots, H_k\} \quad \forall p \in P_k \quad (2.b)$$

$$\sum_{p \in P_k} y_p^{hk} \leq 1 \quad \forall k \in K \quad \forall h \in \{1, \dots, H_k\} \quad (2.c)$$

$$\sum_{h=1}^{H_k} \sum_{p \in P_k} x_p^{hk} = d_k \quad \forall k \in K \quad (2.d)$$

$$x_p^{hk} \geq 0 \quad \forall k \in K \quad \forall h \in \{1, \dots, H_k\} \quad \forall p \in P_k \quad (2.e)$$

$$y_p^{hk} \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K \quad \forall h \in \{1, \dots, H_k\} \quad \forall p \in P_k \quad (2.f)$$

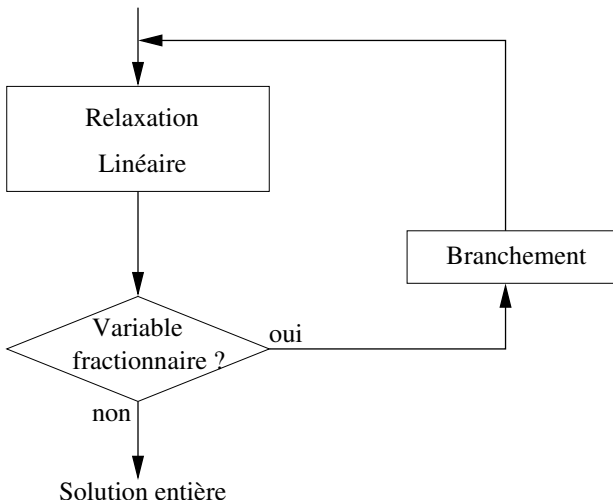
Etat de l'art : *Branch & Price*

- ▶ *Branch & Bound* : A. Land et A. Doig (1960)

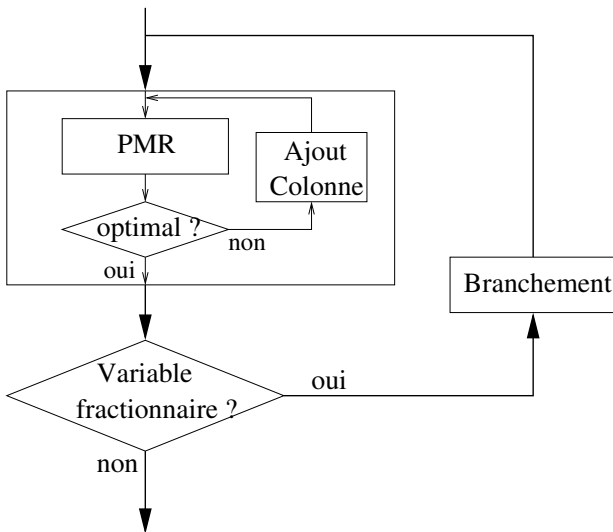
- ▶ *Branch & Price* : C. Barnhart, E.L. Johnson, G.L. Nemhauser, M.W.P. Savelsbergh, P.H. Vance (1998)

- ▶ *Branch & Price* pour l'UFP :
 - ▶ C. Barnhart, C.A. Hane, P.H. Vance (2000)
 - ▶ F. Alvelos et J.M. Valério de Carvalho (2003)

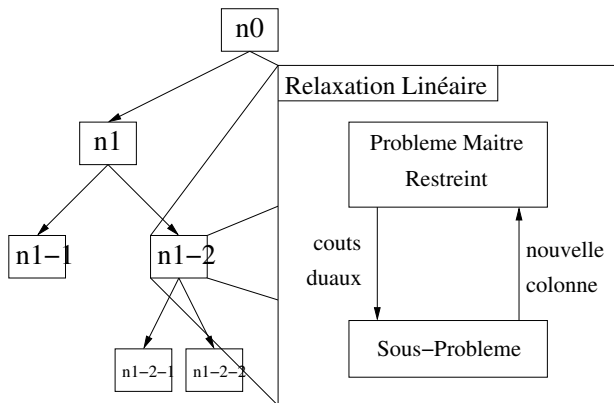
Branch & Bound : A. Land et A. Doig (1960)



Branch & Price : C. Barnhart & al. (1998)



Branch & Price : Arbre de décision



Branchement de Ryan et Foster (1981)

- ▶ Branchement sur les variables du modèles étendu (y) :

$$(y_e^{hk} = 0) \quad \text{vs} \quad (y_e^{hk} = 1)$$

Branchement de Ryan et Foster (1981)

- ▶ Branchement sur les variables du modèles étendu (y) :

$$(y_e^{hk} = 0) \quad \text{vs} \quad (y_e^{hk} = 1)$$

- ▶ Branchement de Ryan et Foster :

- ▶ Contrainte : $\sum_{j \in J} y_j = 1$

- ▶ Partition $J = J_1 \cup J_2$

- ▶ Branchement :

$$\left(\sum_{j \in J_1} y_j = 0 \right) \quad \text{vs} \quad \left(\sum_{j \in J_1} y_j = 1 \right)$$

Branchement de Ryan et Foster (1981)

- ▶ Branchement sur les variables du modèles étendu (y) :

$$(y_e^{hk} = 0) \quad \text{vs} \quad (y_e^{hk} = 1)$$

- ▶ Branchement de Ryan et Foster :

- ▶ Contrainte : $\sum_{j \in J} y_j = 1$

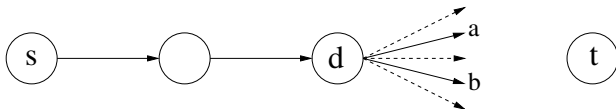
- ▶ Partition $J = J_1 \cup J_2$

- ▶ Branchement :

$$\left(\sum_{j \in J_1} y_j = 0 \right) \quad \text{vs} \quad \left(\sum_{j \in J_2} y_j = 0 \right)$$

Branchement de Barnhart, Hane et Vance (2000)

- ▶ Branchement sur les variables du graphe : premier noeud de divergence :



- ▶ Contrainte $\sum_{e \in \omega^+(d)} y_e^{hk} \leq 1$
- ▶ Partition $\omega^+(d) = \omega^+(d, a) \cup \omega^+(d, b)$
- ▶ Branchement $(\sum_{e \in \omega^+(d, a)} y_e^{hk} = 0)$ vs $(\sum_{e \in \omega^+(d, b)} y_e^{hk} = 0)$

Programme Maître Restreint

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{h=1}^{H_k} \sum_{p \in P_k} c_p x_p^{hk}$$

s.c.

$$\sum_{h,k,p} \delta_e^p x_p^{hk} \leq u_e \quad \forall e \quad (3.a)$$

$$x_p^{hk} - u_p y_p^{hk} \leq 0 \quad \forall k \forall h \forall p \quad (3.b)$$

$$\sum_{p \in P_k} y_p^{hk} \leq 1 \quad \forall k \forall h \quad (3.c)$$

$$\Rightarrow y_p^{hk} = \frac{x_p^{hk}}{u_p}$$

$$\sum_{h=1}^{H_k} \sum_{p \in P_k} x_p^{hk} = d_k \quad \forall k \quad (3.d)$$

$$x_p^{hk} \geq 0 \quad \forall k \forall h \forall p \quad (3.e)$$

$$y_p^{hk} \in [0, 1] \quad \forall k \forall h \forall p \quad (3.f)$$

Coût réduit

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{h=1}^{H_k} \sum_{p \in P_k} c_p x_p^{hk}$$

s.c.

$$\sum_{h,k,p} \delta_e^p x_p^{hk} \leq u_e \quad \forall e \quad \rightarrow \pi_e \leq 0$$

$$\sum_p \frac{x_p^{hk}}{u_p} \leq 1 \quad \forall k \forall h \quad \rightarrow \lambda^{hk} \leq 0$$

$$\sum_{h,p} x_p^{hk} = d_k \quad \forall k \quad \rightarrow \nu^k \in \mathbb{R}$$

$$x_p^{hk} \geq 0 \quad \forall k \forall h \forall p$$

\Rightarrow Coût réduit :

$$\overline{c_p^{hk}} = c_p - \sum_{e \in E} \delta_e^p \pi_e - \frac{\lambda^{hk}}{u_p} - \nu^k = \sum_{e \in E} \delta_e^p (c_e - \pi_e) - \frac{\lambda^{hk}}{u_p} - \nu^k$$



Sous-problème

- ▶ Plus court chemin - Chemin de capacité maximale
- ▶ Etape 1 : Dijkstra modifié pour calculer le plus "gros" PCC
- ▶ Etape 2 : Ajout d'une limite inférieure sur la capacité

Améliorations

- ▶ Pool commun aux noeud de l'arbre de décision
- ▶ *Variable Ordering* : "casser" la symétrie du modèle

$$\sum_{p \in P_k} x_p^{hk} \leq \sum_{p \in P_k} x_p^{(h-1)k} \quad \forall k \in K, \quad \forall h \in \{2, \dots, H_k\}$$

- ▶ *Jump Tracking* : parcours en profondeur de l'arbre de décision

Résultats Numériques

- ▶ Instances :
 - ▶ 5 - 20 nœuds
 - ▶ densité de 5 - 8
 - ▶ topologie aléatoire des graphes
 - ▶ commodités aléatoires

- ▶ Processeur pentium 2.6GHz, linux 2.6, 2Go RAM

- ▶ Compilateur gcc 3.3, ILOG CPLEX 8.0

Comparaison des temps de calculs

Graph	H	z*	CPU Time (s)					
			C	BB	BP	BP-V	BP-P	BP-VP
10-80-3	2	31 916.72	96.88	1614.82	19.44	7.24	4.51	2.09
	3	19 590.91	956.10	-	1426.35	42.04	461.18	17.80
	4	15 725.96	-	-	-	2439.63	-	1937.42
	∞	13 648.96	-	-	-	-	-	-
11-84-11	2	52 283.41	243.27	196.62	7.60	1.36	1.14	0.23
	3	49 518.18	-	-	-	60.37	2880.27	10.00
	4	47 992.11	390.26	-	-	117.73	-	14.58
	5	47 144.52	-	-	-	387.23	-	43.08
	6	46 769.39	-	-	-	128.34	-	22.61
	7	46 663.70	3063.54	-	2325.95	58.58	356.14	9.60
	8	46 605.55	-	-	-	158.19	817.17	8.01
	9	46 589.01	13.00	-	0.61	457.21	0.09	18.80
	∞	46 589.01	-	-	-	-	-	-

Tab.: Comparaison des temps de calcul.

Conclusions et perspectives

- ▶ Généralisation de la notion de flot entier
Application de la méthode de *Branch & Price*
- ▶ Temps de calcul encore important sur des graphes de plus grand taille
- ▶ Application de cette méthode à d'autres problèmes :
 - ▶ *Maximum Concurrent Flow*
 - ▶ Décomposition Minimum d'un flot
 - ▶ Routage avec contrainte de délai et nombre de LSP minimal